WISKUNDE VI, cursus '92–'93, Tentamen

17 juni 1993, duur: drie uur.

1.[1] De onderdelen (a) en (b) zijn van elkaar onafhankelijk.
(a)[4] Bepaal een gehele funktie f en een $a \in \mathbb{R}$ zodat

$$\operatorname{Im} f(x+iy) = x^2 + x + a(y^2+y), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

en schrijf f als funktie van de complexe variabele $z = x + iy$.
(b)[5] Bepaal de integraal:

$$\int_0^{2\pi} (\cos 2\varphi)^3 \cos n\varphi \, d\varphi$$

met behulp van de Laurentreeks van $(z^2 + z^{-2})^3$.

2.[1.9] Bepaal de integraal:

$$I = \int_0^\infty \frac{x^{-\frac{1}{3}} dx}{(x^2+1)(x^2+64)}.$$

Hierbij heeft $x^{-\frac{1}{3}}$ de hoofdwaarde op de integratieweg. Geef alle benodigde afschattingen.
(Antwoord ter controle: $I = \frac{5\pi\sqrt{3}}{1008}$.)

3.[1] (a)[4] Toon aan dat

$$(*) \qquad 4z(1-z)w''(z) + (2-4z)w'(z) + a^2 w(z) = 0 \quad (a > 0)$$

een Riemann differentiaalvergelijking is met P-symbool

$$P\left\{\begin{array}{cccc} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}a & z \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}a & \end{array}\right\}$$

(Z.O.Z.)